Musterlösung zu den Übungsaufgaben

Die verwendeten Formeln sind dem Tafelwerk entnommen.

1) Freier Fall, Weg-Zeit-Gesetz: $y = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2} \cdot t^2$

gegeben: $y_0 = 0\,m$ $\quad v_0 = 0\,\frac{m}{s}$ $\quad g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ $\quad y = -0{,}12\,m$

gesucht: t

Ansatz: $y = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = 0 + 0 \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2 = -\frac{g}{2} t^2 \quad \Big| : \left(-\frac{g}{2}\right)$

$$-\frac{2 \cdot y}{g} = t^2 \quad \Big| \sqrt{}$$

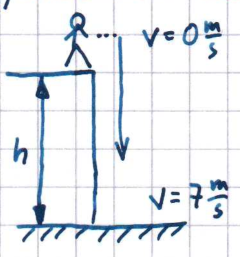
$$\sqrt{-\frac{2y}{g}} = t$$

Werte in umgestellte Formel einsetzen:

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{2 \cdot (-0{,}12\,\cancel{m})}{9{,}81\,\frac{\cancel{m}}{s^2}}} = \sqrt{\frac{0{,}24}{9{,}81}}\,s \approx \underline{\underline{0{,}156\,s}}$$

Antwort: Pauls Reaktionszeit beträgt etwa 0,16 Sekunden.

2) Freier Fall bzw. gleichmäßig beschleunigte Bewegung



Formeln: $v = a \cdot t$

$s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$

gegeben: $v = 7\,\frac{m}{s}$

$a = g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

gesucht: $h = s$

1. Formel nach t umstellen: $v = a \cdot t \quad | : a$

$t = \frac{v}{a}$

Einsetzen in 2. Formel: $s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{v}{a}\right)^2$

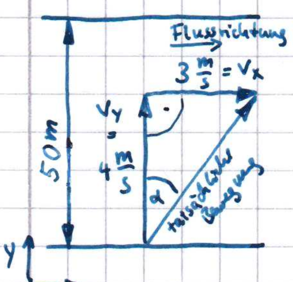
$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$$

$$= \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(7\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}$$

$$= \frac{49\,\frac{m^{\cancel{2}}}{\cancel{s^2}}}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}} = \underline{\underline{2{,}497\,m}}$$

Antwort: Die Fallschirmspringer müssen zu Übungszwecken aus einer Höhe von etwa 2,5 m abspringen.

3) Zusammensetzung von Geschwindigkeiten



$$v_{ges}^2 = v_x^2 + v_y^2$$

a) Die minimale Zeit erreicht Max, wenn er senkrecht auf dem 50 m breiten Fluss paddelt. In Bezug auf den sich bewegenden Fluss legt er damit 50 m zurück – nur hat ihn der Fluss währenddessen auch in x-Richtung weitertransportiert.

Gleichförmige Bewegung: $s = v \cdot t$

geg: $v = 4\,\frac{m}{s}$ $\quad s = 50\,m$

ges: t

Ansatz: $s = v \cdot t \quad | : v$

$$t = \frac{s}{v} = \frac{50\,\cancel{m}}{4\,\cancel{m}/s} = \underline{\underline{12{,}5\,s}}$$

Weiterbewegung in x-Richtung: ebenfalls gleichförmige Bewegung

geg: $v = 3\,\frac{m}{s}$ $\quad t = 12{,}5\,s$

ges: s_x

$$s_x = v_x \cdot t = 3\,\frac{m}{\cancel{s}} \cdot 12{,}5\,\cancel{s} = \underline{\underline{37{,}5\,m}}$$

Antwort: Max benötigt mindestens 12,5 Sekunden für die Flussüberquerung. Er ist dabei um 37,5 m abgedriftet.

b) Die tatsächliche Geschwindigkeit ergibt sich durch den Satz des Pythagoras.

$$v_{ges} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(3\,\frac{m}{s}\right)^2 + \left(4\,\frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{9 + 16}\,\frac{m}{s} = \sqrt{25}\,\frac{m}{s} = 5\,\frac{m}{s}$$

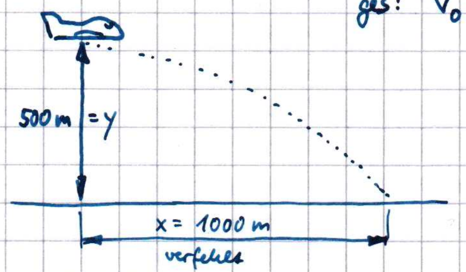
$$\sin\alpha = \frac{3\,\frac{m}{s}}{5\,\frac{m}{s}} = \frac{3}{5} \quad \Big| \; \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \underline{36{,}9^\circ}$$

Antwort: Über dem Grund des Flusses hat Max eine Geschwindigkeit von 5 Metern pro Sekunde.

4) Waagerechter Wurf Formeln: $y = -\frac{g}{2}t^2$ $x = v_0 \cdot t$

geg: $y = -500\,m$ $x = 1000\,m$ $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

ges: v_0



$$y = -\frac{g}{2}t^2 \quad \Big| : \left(-\frac{g}{2}\right) \quad \text{nach } t \text{ umstellen}$$

$$-\frac{2y}{g} = t^2 \quad \Big| \sqrt{\ }$$

$$t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} \quad \text{einsetzen in } x = v_0 t$$

$$v_0 \cdot t = x \quad \Big| : t$$

$$v_0 = \frac{x}{t} = \frac{x}{\sqrt{\frac{-2y}{g}}} = x \cdot \sqrt{\frac{g}{-2y}}$$

$$v_0 = 1000\,m \sqrt{\frac{9{,}81\,\frac{m}{s^2}}{-2 \cdot (-500\,m)}}$$

$$= 1000\,m \sqrt{\frac{9{,}81}{1000}}\,\frac{1}{s} = \underline{\underline{99\,\frac{m}{s}}}$$

$$v_0 = 99\,\frac{m}{s} = 99 \cdot 3{,}6\,\frac{km}{h} = \underline{\underline{357\,km/h}}$$

Antwort:

Die Geschwindigkeit des Flugzeuges beträgt etwa $99\,\frac{m}{s}$ oder $357\,km/h$.

5) a) Senkrechter Wurf ; Formeln $v = v_0 - g \cdot t$ und $y = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2$

An der höchsten Stelle ist das Wasser in Ruhe, $v = 0$, also $v = 0 = v_0 - g t \quad |+gt$

somit $v_0 = g \cdot t \quad |:g$

geg: $y_0 = 0\,m$ $v_0 = 30\,\frac{m}{s}$ $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$

Zeit des höchsten Punktes: $t = \frac{v_0}{g}$

ges: y_{max}

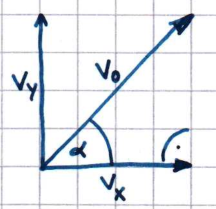
Ansatz: $y = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g \cdot v_0^2}{2 \cdot g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$

Einsetzen: $y = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\left(30\,\frac{m}{s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = \frac{900\,\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = \underline{\underline{45{,}9\,m}}$

Antwort:

Die maximale Höhe der Wasserfontäne beträgt 45,9 Meter.

b) Schräger Wurf Formel: $y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot t \cdot \sin(\alpha)$



$v_x = v_0 \cdot \cos(\alpha)$

$v_y = v_0 \cdot \sin(\alpha)$

geg: $v_0 = 30\,\frac{m}{s}$ $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ $\alpha = 45^\circ$ maximale Reichweite → $y = 0$

Lösung GTR: solve $(0 = -0.5 * 9.81 \cdot t \wedge 2 + 30 * t * \sin(45), t)$

$t = 4{,}32\,s$

$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$

$= 30\,\frac{m}{\cancel{s}} \cdot 4{,}32\,\cancel{s} \cdot \cos(45^\circ) = \underline{\underline{91{,}74\,m}}$

In einer Zeile:

solve $(0 = -0.5 * 9.81 * t \wedge 2 + 30 * t * \sin(45)$ and $x = 30 * t * \cos(45)$ and $x > 0, \{x, t\})$

Antwort: Die Reichweite der Fontäne bei einem Abstrahlwinkel von 45° beträgt 91,74 m.

c) Schräger Wurf, Formeln siehe b), Begründung siehe a) : $v = 0 = v_y - gt = v_0 \sin(\alpha) - gt \quad |+gt$

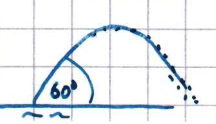
$gt = v_0 \sin(\alpha) \quad |:g$

$t = \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{g}$

$$y = y_0 + \underbrace{v_y}_{v_0 \cdot \sin(\alpha)} \cdot t - \frac{g}{2}t^2 = v_0 \cdot \sin\alpha \, \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} - \frac{\cancel{g}}{2}\frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{g^{\cancel{2}}} = \frac{v_0^2 (\sin\alpha)^2}{2g}$$

Einsetzen: $y = \frac{v_0^2 (\sin(\alpha))^2}{2g} = \frac{\left(30\,\frac{m}{s}\right)^2 (\sin(60^\circ))^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}} = \frac{900\,\frac{m^{\cancel{2}}}{\cancel{s^2}} \cdot (\sin(60^\circ))^2}{2 \cdot 9{,}81\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{s^2}}} = \underline{\underline{34{,}4\,m}}$

Antwort: Die maximale Höhe der Fontäne bei einem Winkel von 60° ist 34,4 Meter.



6) Saturn V Rakete

$1N = 1 \frac{kg\,m}{s^2}$

a) Grundgleichung der Mechanik $F = m \cdot a$

$F = 35\,000\ kN = 35\,000\,000\ N$

$m = 2712\ t = 2\,712\,000\ kg$

$F = m \cdot a \quad | : m$

$a = \frac{F}{m} = \frac{35\,000\,000\ N}{2\,712\,000\ kg} = \underline{\underline{12{,}9\ \frac{m}{s^2}}}$

Antwort: Die Beschleunigung ist $12{,}9\ \frac{m}{s^2}$.

b) Die Schubkraft F ist unverändert, aber die zu beschleunigende Masse ist um 2000 t Treibstoff der ersten Stufe geschrumpft, daher $m = 712\ t = 712\,000\ kg$

$a = \frac{F}{m} = \frac{35\,000\,000\ N}{712\,000\ kg} = \underline{\underline{49{,}2\ \frac{m}{s^2}}}$

Antwort: Die Beschleunigung ist $49{,}2\ \frac{m}{s^2}$.

c) Die 2000 t Treibstoff werden mit 13,5 t je Sekunde verbrannt, also

$2\,000\,000\ kg = 13\,500\ \frac{kg}{s} \cdot t$ und somit $t = \frac{2\,000\,000\ \cancel{kg}}{13\,500\ \cancel{kg}/s} = \underline{\underline{148{,}1\ s}}$

Die Rakete beschleunigt 148 Sekunden mit einer Beschleunigung zwischen $12{,}9\ \frac{m}{s^2}$ und $49{,}2\ \frac{m}{s^2}$. Wir rechnen mit dem Mittelwert von $31\ \frac{m}{s^2}$

In Abschätzung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist $v = a \cdot t = 31 \frac{m}{s^{\cancel{2}}} \cdot 148\,\cancel{s}$
$= 4588\ \frac{m}{s}$
$= \underline{\underline{4{,}6\ km/s}}$

Abgeschätzte Höhe: $s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 31 \frac{m}{\cancel{s^2}} \cdot (148)^2\,\cancel{s^2}$

$= 679\,024\ m = \underline{\underline{679\ km}}$

Anmerkung: Die Abschätzung der Geschwindigkeit und insbesondere der Höhe weicht sehr stark von den tatsächlichen Größen ab, weil die Beschleunigung sehr lange Zeit aufgrund der großen Masse geringer als abgeschätzt ausfällt:

Antwort: Als grobe Abschätzung ist die Saturn V beim Ausbrennen der 1. Stufe 4,6 km/s schnell und hat eine Höhe von 679 km erreicht.

d) Ansatz mit $v = a \cdot t$, wobei $F = m \cdot a$ nach a umgestellt $a = \frac{F}{m}$ ist und die betrachtete Zeit eine Sekunde ist ($t = 1s$), in der $m = 13{,}5\ t = 13\,500\ kg$ Treibstoff verbraucht/ausgestoßen werden. Dabei entsteht eine Schubkraft von $F = 35\,000\,000\ N$.

$v = a \cdot t = \frac{F}{m} \cdot t = \frac{35\,000\,000\ \frac{\cancel{kg}\,m}{s^{\cancel{2}}}}{13\,500\ \cancel{kg}} \cdot 1\,\cancel{s} = 2593\ \frac{m}{s} = \underline{\underline{2{,}6\ \frac{km}{s}}}$

Antwort:
Die relative Austrittsgeschwindigkeit der Verbrennungsgase beträgt $2{,}6\ \frac{km}{s}$.

Zum Vergleich: Die Schallgeschwindigkeit beträgt bei 20°C etwa $343\ \frac{m}{s}$.